d) Etudier les variations de $f$, construire la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté a un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ (pour la construction on prendra $a = 1.6$ )

3°/ On considère la fonction $F$ définie sur $R_+$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout réel positif $x$ .

b) Montrer que $F$ est continue et strictement croissant sur l'intervalle $I = [0,+\infty[$ .

c) Donner la forme de l'intervalle $F(I)$.

4°/ On considère la fonction $G$ définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $G(x) = \int_{Log2}^x t^2 e^{-t}\,dt$

a) Justifier l'existence de $G(x)$ pour tout réel positif x .

b) A l'aide de deux intégrations par partie, calculer $G(x)$ puis montrer que $G$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera .

c) Montrer que : pour tout $t \in [Log2,+\infty[$ on a : $f(t) \le 2t^2 e^{-t}$

et en déduire qu'il existe un réel positif $M$ tel que pour tout $x \in R_+$, on a : $F(x) \le M$.

d) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} F(x) \le M$

( dans la suite de problème en prendra $L = \lim_{x\to+\infty} F(x)$ )

**B** - Dans cette partie, $n$ désigne un entier naturel non nul.

1°/ a) Montrer que pour tout réel positif $x$, on a :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots\ldots\ldots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

b) Montrer que pour tout réel positif $x$ on a :

$$0 \le \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt \le \frac{a(2-a)}{n}$$

c) $x$ étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt}\,dt$

d) Montrer que $I_n(x)$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

2°/ a) Montrer que pour tout réel positif $x$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} I_K(x) = F(x) - \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt$$

En déduire que la fonction $H_n$ définie sur $\mathbf{R}_+$ par :